Global structure of and elliptic fibration

AUTHOR(S):

中山, 昇

代数幾何学シンポジウム記録
1995年度 pp.108-115

GLOBAL STRUCTURE OF AN ELLIPTIC FIBRATION

京大・数研 中山 昇

§0. 複素解析空間の間の全射固有射で各ファイバーが連結であり一般ファイバーが楕円曲線となるものを楕円ファイバー空間(elliptic fibration)とよぶ。ここでは elliptic fibration $f: X \to S$ で S が nonsingular であり、S 上の normal crossing divisor D の外側で f が smooth となるものを考える。D の各点での f の局所的様子は [2] で up to bimeromorphic equiv. relation で分類されているが、今度は S 全体の上での様子を記述するのが目的である。与えられた f に対して $S^{\star} := S \setminus D$ 上に variation of Hodge structures (VHS と略す) $R^1 f_* \mathbb{Z}_X|_{S^\star} =: H$ が定まる。$S^\star$ 上にどれだけ rank 2, weight 1 の VHS が存在するか、という問題もあるが、ここではそれにはふれず H も与えられているとして考える。即ち次の集合の記述が目的である。

$$\widetilde{\mathcal{E}}(S, D, H) = \{ (f: X \to S, \phi) \mid f は上述の elliptic fibration$$
$$\phi は VHS としての同型 \quad \phi: R^1 f_* \mathbb{Z}_X|_{S^\star} \xrightarrow{\sim} H \} / \sim_{bim/S}$$

ここで同値関係 $\sim_{bim/S}$ は以下の様に定義される。

$(f_1 : X_1 \to S, \phi_1) \sim_{bim/S} (f_2 : X_2 \to S, \phi_2)$ となるのは

ある S 上の bimeromorphic mapping $\varphi: X_1 \cdots\rightarrow X_2$ が存在し

図式

$$\begin{tikzcd} R^1 f_{1*}\mathbb{Z}_{X_1}|_{S^*} \arrow[dr, "\phi_1"'] & & R^1 f_{2*}\mathbb{Z}_{X_2}|_{S^*} \arrow[ll, "\varphi^*"'] \arrow[dl, "\phi_2"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

が可換となること。

ところがこの $\tilde{\mathcal{E}}(S,D,H)$ はちょっと大きすぎる集合なので以下の2つの部分集合を主に考える。

$\mathcal{E}(S,D,H)=\{(f:X\rightarrow S,\phi)\in\tilde{\mathcal{E}}(S,D,H) \mid f$ は S 上局所的に projective morphism と bimeromorphically equivalent$\}$

$\mathcal{E}^+(S,D,H)=\{(f:X\rightarrow S,\phi)\in\tilde{\mathcal{E}}(S,D,H) \mid f$ は projective morphism と bimeromorphically equivalent$\}$.

$f: X\rightarrow S$ が projective morphism と bimeromorphically equivalent なのは X に prime divisor Γ があって S を dominate していることと同値である。

ここで次の定理を得た。

定理 $\mathcal{E}(S,D,H)\hookrightarrow H^1(\underline{S},\mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$

$\mathcal{E}^+(S,D,H) = H^1(\underline{S},\mathfrak{S}_{H/\underline{S}})_{tor}$

ここで $\underline{S}=(S,D)$ は S と D から決まる ∂-space（後述）であり、$\mathfrak{S}_{H/\underline{S}}$ は H の定める basic fibration の meromorphic section の germ のなす ∂-étale topology（後述）での sheaf であり、$H^1(\underline{S},\mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ はその1次の ∂-étale cohomology group である。

§1 ∂-space と ∂-étale topology

∂-space の Category を定義する前に、$\mathcal{AB}$ という Category を用意する。$\mathcal{AB}$ の object は pair $[X, B]$ で X は paracompact な complex analytic space, $B \subset X$ は nowhere dense な closed analytic subset である。$\mathcal{AB}$ の morphism $f : [X, B] \to [Y, D]$ とは holomorphic mapping $f : X \to Y$ で $f^{-1}D \subset B$ となるもののことである。$\mathcal{AB}$ では fiber 積が存在することがわかる。ここで ∂-isomorphism と ∂-étale morphism を定義する。$f : [X, B] \to [Y, D]$ が ∂-isomorphism であるとは、3条件

(1) f は finite morphism (2) $f^{-1}D = B$ (3) $X \setminus B \xrightarrow{\sim} Y \setminus D$

が満たされることであり、f が ∂-étale morphism であるとは、3条件

(1) f は discrete fiber しか持たない (2) $f^{-1}D = B$ (3) $X \setminus B \to Y \setminus D$ は étale (local isomorphism)、が満たされることである。Category $\mathcal{AB}$ を ∂-isomorphism で局所化して ∂-space の Category を得る。$[X, B]$ の定める ∂-space を (X, B) と書く。$(X, B) \simeq (Y, D)$ となるのはある $[Z, \Delta]$ と ∂-isomorphisms $[Z, \Delta] \to [X, B]$, $[Z, \Delta] \to [Y, D]$ が存在する時に限る。

例　1次元 unit disc を $\Delta = \{ t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1 \}$ と書く。ここで2つの射

$C_1 := \Delta \ni t \mapsto t^m \in \Delta =: C_3$, $C_2 := \Delta \ni t \mapsto t^n \in \Delta = C_3$

を考える (ただし m, n は互いに素)。すると $(C_1, \{0\}) \to (C_3, \{0\})$, $(C_2, \{0\}) \to (C_3, \{0\})$ は ∂-étale である。さらに fiber product

$(C_1, \{0\}) \times_{(C_3, \{0\})} (C_2, \{0\})$ は $(\Delta, \{0\})$ に同型で第1射影、

第2射影は $t \mapsto t^n$, $t \mapsto t^m$ で与えられる。

この様に ∂-étale というのは branched covering まで あたかも étale の様に取扱え さらに fiber product も通常のものを正規化した様なものでとりかえられるのである。∂-étale morphism たちは ∂-space の Category に 1つの topology を導入する。これを ∂-étale topology と呼ぶ。multiple fiber をもつ elliptic surface $X \to \Delta$ で branched covering $\Delta \ni t \mapsto t^m \in \Delta$ をとれば、∂-space の世界では $(\Delta, \{0\}) \to (\Delta, \{0\})$ と ∂-étale を考えているので base change (fiber product) すれば section が存在する。つまり通常は section が存在しないのが、∂-étale local には section が存在するのである。これで multiple fiber を持つ場合も含めて elliptic fibration の全体を torsor もどきで表わす可能性が出てきたのである。

∂-space $\underline{X}$ に対して"点"の集合 $sp(\underline{X})$ が定義され、$\underline{X}$ 上の ∂-étale topology についての sheaf F のその"点"での stalk も定義される。それによって F の injective resolution が構成され right derived functors が定義できる。これで ∂-étale cohomology $H^p(\underline{X}, F)$ ができるがこれは実は Cech cohomology (∂-étale covering による) $\check{H}^p(\underline{X}, F)$ と同型になることが paracompact 性を使って示される。それにより Leray の spectral sequence 等も考えられる。このあたりのことは書けば長くなるだけなのでそれ相応に理解していただきたい。$\underline{X} = (X, B)$ の時、$\varepsilon : \underline{X} \to X = (X, \phi)$ (同一視) という射が存在する。$\underline{X}$ 上の sheaf F が $\mathbb{Q}$-vectorspace の構造を持つとき $H^p(\underline{X}, F) \simeq H^p(X, \varepsilon_* F)$

となる。$\mathcal{E}_* F$ は X 上の通常の sheaf である。従って $\mathbb{Q}$-vector space の sheaf の cohomology を考える時は通常の空間で考えればよい。しかしそうでない時はおもしろいことがおきる。たとえば X が nonsingular B が normal crossing divisor の時は $H^0(\underline{X}, \mathbb{Z}) \simeq H^0(X, \mathbb{Z})$, $H^1(\underline{X}, \mathbb{Z}) \simeq H^1(X, \mathbb{Z})$, $H^2(\underline{X}, \mathbb{Z}) \simeq H^2_B(X, \mathbb{Q}) \oplus H^2(X, \mathbb{Z}) / H^2_B(X, \mathbb{Z})$

一般に $\to H^p_B(X, \mathbb{Z}) \to H^p_B(X, \mathbb{Q}) \oplus H^p(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^p(\underline{X}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{p+1}_B(X, \mathbb{Z}) \to$ という exact seq. が存在する。またこの時 structure sheaf $\mathcal{O}_{\underline{X}}$ の unit elements からなる sheaf $\mathcal{O}^\times_{\underline{X}}$ に対し Picard group を $\mathrm{Pic}(\underline{X}) = H^1(\underline{X}, \mathcal{O}^\times_{\underline{X}})$ と定義すると. $\mathrm{Pic}(\underline{X}) \simeq \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{Div}_B(X)_{\mathbb{Q}} / \mathrm{Div}_B(X)$ ここで $\mathrm{Div}_B(X)$ は各 component が B の成分からなる divisor たちのなす群で $\mathrm{Div}_B(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ は divisor に invertible sheaf を対応させる射.

(いい忘れましたが $\underline{X} = (X, B)$ です) 従って X 上の $\mathbb{Q}$-divisor Δ でその fractional part の component が B の成分となるものに対しては, $\mathcal{O}_{\underline{X}}$-invertible sheaf $\mathcal{O}_{\underline{X}}(\Delta)$ が対応する。ちなみに $\mathcal{E}_* \mathcal{O}_{\underline{X}}(\Delta) \simeq \mathcal{O}_X([\Delta])$

§2. Elliptic fibration.

§0 の (S, D, H) を考える。$\underline{S} = (S, D)$ とおく。H に対して次の性質を満たす elliptic fibration $p: B = B(H) \longrightarrow S$ が存在する。

(1) p は global section を持つ (2) $S^* = S \setminus D$ 上 smooth.

(3) $R^1 p_* \mathbb{Z}_B |_{S^*} \simeq H$ (VHS として同型).

この時 もしも 別に (1)〜(3) をみたす $p': B' \longrightarrow S$ があったとすると.

S 上の bimeromorphic mapping $\varphi : B \dashrightarrow B'$ で，φ は一方の global section をもう一方のそれにうつす，φ は (3) の VHS の同型と可換図式を作る，というものが存在する。従ってこのような $p : B \to S$ は S 上の bimeromorphic equiv. relation を modulo にすれば unique である。

この $p : B \to S$ を H に付随する basic fibration とよぶ。ここで $\underline{S}$ 上の sheaf $\mathfrak{S}_{H/\underline{S}}$ が $p : B \to S$ の meromorphic section の germ のなす sheaf として定義される。$\mathcal{E}(S, D, H)$ に属する elliptic fibration $f : X \to S$ に対して S 上 local に高々 D で branch する covering があってそこに f を引きもどすと section が出来る，というのが [2] における1つの結果である。従って $f : X \to S$ は $\underline{S}$ 上 ∂-étale local には section を持つ。このことから injection $\mathcal{E}(S, D, H) \hookrightarrow H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ の存在がいえる。ここで basic fibration は 0 に対応している。$(f : X \to S, \Phi)$ に対して この $H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ の元を定めることは次の様にみることもできる。

$\underline{f} : \underline{X} = (X, f^{-1}D) \to \underline{S}$ とおく。$R^1\underline{f}_*\mathcal{O}_{\underline{X}}^{\times}$ の subsheaf $\mathcal{V}_{\underline{X}}$ を

$$\mathcal{V}_{\underline{X}} = \mathcal{H}_D^0(R^1\underline{f}_*\mathcal{O}_{\underline{X}}^{\times})$$

($\mathcal{H}_D^0$ は local cohomology) と定義する。

この時 exact sequence

$$0 \to \mathfrak{S}_{H/\underline{S}} \longrightarrow R^1\underline{f}_*\mathcal{O}_{\underline{X}}^{\times}/\mathcal{V}_{\underline{X}} \to \mathbb{Z}_{\underline{S}} \longrightarrow 0$$

が存在し $H^0(\underline{S}, \mathbb{Z}_{\underline{S}}) \to H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ における 1 の像が求める元となる。$f : X \to S$ が projective morphism と bimeromorphically equiv. な時は S を dominate する divisor の存在から $H^0(\underline{S}, R^1\underline{f}_*\mathcal{O}_{\underline{X}}^{\times}) \to H^0(\underline{S}, \mathbb{Z}_{\underline{S}})$ の像は zero ではない。従って対応する $H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$

の元は torsion element になる。逆に $(f: X \to S, \phi)$ が $H^1(\Sigma, \mathfrak{S}_{H/\Sigma})$ の torsion element に対応している場合、$B \dashrightarrow B$（m倍写像）を考えることにより $X \dashrightarrow B$ generically finite が存在し f が projective morphism と bim. equiv. であることがわかる。次に $H^1(\Sigma, \mathfrak{S}_{H/\Sigma})_{tor}$ の元をかってにとってきたときは、$(f: X \to S, \phi)$ の local な対応物 $X_\alpha \to S_\alpha$ （$\{S_\alpha\}$ は S の open covering）と generically finite meromorphic mapping $X_\alpha \dashrightarrow B|_{S_\alpha}$ で $X_\alpha|_{S_\alpha \cap S_\beta} \dashrightarrow X_\beta|_{S_\beta \cap S_\alpha}$ と commute するものがつくれる。$X_\alpha \dashrightarrow B|_{S_\alpha}$ の Stein 分解を考えることにより projective elliptic fibration $f: X \to S$ が得られる。

以上が定理の証明の概略だが、∂- étale local には section を持つという [2] の結果自身 H から派生するいくつかの ∂- étale topology における sheaf の可換図式などから自動的に導かれる。また定理の $\mathcal{E}^+(S, D, H) = H^1(\Sigma, \mathfrak{S}_{H/\Sigma})_{tor}$ により S を D の点の局所近傍でとりかえれば elliptic fibration の local structure が得られるが、これも確かに [2] で得られたものと一致する。定理の応用はいくつかあるが、きわだっているのは次の上野氏の問題の解決である。

問題　$Y \to \Delta^2 \setminus \{0\} = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |t_1|, |t_2| < 1, (t_1, t_2) \neq (0, 0)\}$ を smooth な elliptic fibration で global section を持たないものとする。このとき elliptic fibration $X \to \Delta^2$ で $Y \to \Delta^2 \setminus \{0\}$ の拡張になっているものは存在するか？

答えは No. である。ちなみに $Y \to \Delta^2 \setminus \{0\}$ が global section

を持つ場合 その拡張として そのまま smooth な elliptic fibration $X \to \Delta^2$ があるが、それ以外に central fiber が Hopf surface などになるものもある。はじめの $\widetilde{\mathcal{E}}(S, D, H)$ が大きすぎるといったのは このような Hopf surface 等が出てくる例が、$S = \Delta^2$ を原点で blow-up し、さらにその例外曲線の点で blow-up し、またさらに.. とくりかえし blow-up して得られた曲面から いくらでも構成されることにある。

References

[1] On Weierstrass models, in *Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of M. Nagata* (1987) Kinokuniya 405–431.

[2] Local structure of an elliptic fibration, preprint 1991.

[3] Global structure of an elliptic fibration, in preparation.